

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставяемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2014 – 2015 учебном году
8 класс**

Время выполнения заданий — 4 часа

2		
	4	
		6

К решению
задачи 8.1

8.1. *Квадрат из чисел называется магическим, если в нём суммы чисел во всех строках, во всех столбцах, а также на двух главных диагоналях равны между собой. В квадрате 3×3 заполнены только три позиции из девяти — см. рисунок.*

а) Дополните этот квадрат числами так, чтобы он стал магическим.

б) Однозначно ли такое дополнение?

Ответ обосновать.

Решение: Квадрат легко достраивается до магического самыми разными способами. На рисунке приведены два из них (квадраты слева и в центре).

2	6	4
6	4	2
4	2	6

2	5	5
7	4	1
3	3	6

2	$12-x$	$x-2$
x	4	$8-x$
$10-x$	$x-4$	6

К решению задачи 8.1

Наиболее просто получить способ на рисунке слева. Надо просто предположить, что в каждой строчке и столбце квадрата есть по одному числу 2, 4 и 6. Квадрат тогда строится однозначно, и легко проверить, что он магический. Другие примеры получить несколько сложнее. Их общий вид можно получить, например, следующим способом. Нам известна так называемая “магическая сумма” (сумма чисел в строке); она равна 12. Обозначим одно из оставшихся чисел через переменную x и выразим через него все остальные элементы квадрата. На рисунке справа за x взято первое число второй строки. Далее можно двигаясь по периметру (порядок не единственный) последовательно найти первое число третьей строки, второе число третьей, третье число второй, третье число первой и второе число первой. После этого остаётся проверить, что по линиям, которые не использовались при заполнении (второй столбец и вторая диагональ) суммы также равны 12. Теперь в качестве x можно взять любое число — получится свой магический квадрат. Так, средний квадрат получается при $x = 7$.

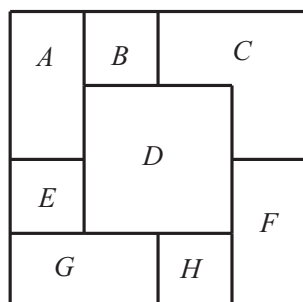
Примечание: Доказать пункт б) можно и не строя никаких примеров. Для этого достаточно показать, что если есть один такой квадрат, то и найдётся и другой.

Второй квадрат строится из первого, например так: добавляем одно и то же число к числам, стоящим в первой, второй и третьей строках на втором, третьем и первом месте соответственно, и это же число отнимаем из чисел, стоящих в первой, второй и третьей строках на третьем, первом и втором месте соответственно. Нетрудно проверить, что при таком преобразовании все интересующие нас суммы не меняются.

Ответ: б) Дополнение не однозначно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное решение обоих пунктов задачи (достаточно привести 2 примера)	7 баллов
решение только одного пункта (либо только один пример, либо при отсутствии любых примеров доказательство, что из одного квадрата можно построить другой)	3 балла
неверные примеры в любом количестве	без оценки
ответ на пункт (б) без обоснования	0 баллов



К решению
задачи 8.2

8.2. Восемь квадратных листов бумаги, все в точности одного и того же размера, были размещены, как показано на рисунке, частично перекрывая один другой. Перечислите все восемь квадратов бумаги в порядке от верхнего листа к нижнему. Ответ обоснуйте.

Решение: Самый верхний квадрат должен иметь наибольшую площадь из всех видимых, значит, это квадрат D . Все остальные квадраты имеют тот же размер, отсюда квадрат A (один из его углов совпадает с левым верхним углом большого квадрата) лежит ниже квадрата B (будем это записывать неравенством $A < B$). Аналогично $G < E$ и $F < H$. Кроме того $B < C$ (так как квадрат B идёт вправо от границы с квадратом A). Также $E < A$ и $H < G$. Получили цепочку $F < H < G < E < A < B < C$, которая и показывает порядок квадратов.

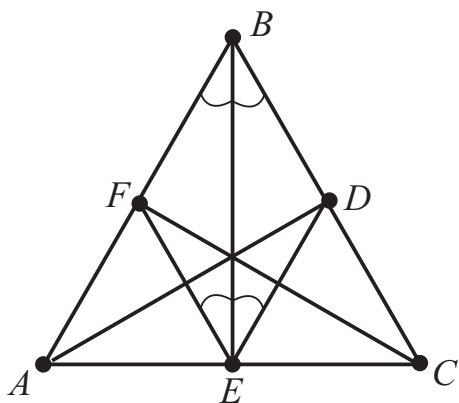
Ответ: D, C, B, A, E, G, H, F .

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
указана верная последовательность квадратов	7 баллов
последовательность указана в обратном порядке	6 баллов
последовательность неверна, но может быть исправлена сменой места ровно одного квадрата	3 балла
другие случаи	0 баллов

8.3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD , BE и CF .

Оказалось, что четырехугольник $FBDE$ — ромб. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.



К решению задачи 8.3
ник ABC равносторонний.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство	7 баллов
доказано, что $AB = AC$ ($BC = AC$) (без доказательства $AB = BC$)	5 баллов
обосновано, что ED (EF) или FD — средняя линия треугольника	3 балла
доказано, что $AB = BC$	2 балла
не доказана даже равнобедренность $\triangle ABC$	0 баллов

8.4. Пусть числа a , b и c (не обязательно целые) таковы, что $a + b + c = 7$ и $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 0,7$.

а) Приведите пример хотя бы одной такой тройки чисел;

б) Определите, какие значения может принимать сумма

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

Решение: а) Привести пример несложно: числа 1, 2, 4 в любом порядке. Это единственная тройка различных натуральных чисел, удовлетворяющая первому уравнению, поэтому её нахождение трудности не вызывает, надо только проверить, что $\frac{1}{1+2} + \frac{1}{2+4} + \frac{1}{4+1} = 0,7$. Если числа не обязательно натуральные, то таких троек бесконечно много, хотя найти хотя бы одну, отличную от приведённой, непросто.

б) Пусть a , b , c — некоторые три числа, удовлетворяющие условию. Заметим, что $\frac{a}{b+c} = \frac{7-(b+c)}{b+c} = \frac{7}{b+c} - 1$. Также преобразуем две другие дроби. Тогда

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{7}{b+c} - 1 + \frac{7}{c+a} - 1 + \frac{7}{a+b} - 1 = 7 \cdot 0,7 - 3 = 1,9.$$

Ответ: а) например, 1, 2, 4; б) 1,9.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верно решены оба пункта (а) и (б)	7 баллов
верное решение обоих пунктов с неверным вследствие арифметической ошибки ответом к пункту (б)	6 баллов
верное решение только пункта (б)	5 баллов
верное решение только пункта (б) с неверным вследствие арифметической ошибки ответом	4 балла
верное решение только пункта (а) (количество примеров любое; если для них подсчитана искомая в пункте (б) сумма, то общее количество баллов не увеличивается)	2 балла
неверные примеры троек чисел	не оцениваются

8.5. Баба-Яга и Кощей собрали некоторое количество мухоморов, при этом общее количество крапинок на мухоморах Бабы-Яги было в 12 раз больше, чем на мухоморах Кощея. Когда Баба-Яга отдала Кощею свой мухомор с наибольшим количеством крапинок, на её мухоморах стало крапинок только в 7 раз больше, чем у Кощея. Докажите, что Баба-Яга собрала не менее 20 мухоморов.

Решение: Пусть на мухоморах Кощея a крапинок; тогда на мухоморах Бабы Яги $12a$ крапинок. Пусть на отданном Кощею мухоморе b крапинок; тогда имеем, что $12a - b = 7(a + b)$, откуда $5a = 8b$ или $a = 1,6b$. На оставшихся мухоморах Бабы Яги крапинок $12a - b = 18,2b$, то есть более, чем в 18 раз больше, чем на отданном мухоморе. Так как на каждом из оставшихся мухоморов крапинок не больше, чем на отданном, то осталось у Яги не меньше 19 мухоморов, а всего она собрала не меньше 20.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство (приводить пример, подтверждающий условие не требуется)	7 баллов
арифметические ошибки, не влияющие на ход доказательства	баллы не понижаются
обосновано, что на оставшихся у Бабы Яги мухоморах крапинок больше, чем на отданном, более чем в 18 раз	5 баллов
верно составлено, но не решено диофантово уравнение	3 балла
задача проиллюстрирована на примерах	0 баллов

8.6. Каждое из натуральных чисел a , b , c и d делится на разность $ab - cd$. Докажите, что эта разность равна $+1$ или -1 .

Решение:

Способ 1. Будем считать разность $x = ab - cd$ положительной (в противном случае положим x равным $cd - ab$). Пусть числа a_1, b_1, c_1 и d_1 — частные от деления соответственно чисел a, b, c и d на x (все числа натуральные). Тогда $a = xa_1, b = xb_1, c = xc_1, d = xd_1$. Имеем $x = ab - cd = x^2a_1b_1 - x^2c_1d_1$. Тогда, так как $x \neq 0$, имеем $1 = x(a_1b_1 - c_1d_1)$. Число $a_1b_1 - c_1d_1$ целое, то есть число x является делителем 1. Но у единицы только один натуральный делитель: 1. Утверждение доказано.

Способ 2. Пусть $x = |ab - cd|$. Ясно, что x — число натуральное, поэтому $x \leq x^2$. Так как на x делится каждое из чисел a, b, c и d , каждое из попарных произведений этих чисел делится на x^2 , а тогда и число $x = |ab - cd|$ также делится на x^2 , откуда $x \geq x^2$. Тогда $x^2 = x, x = 1$ и утверждение доказано.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное доказательство	7 баллов
доказаны частные утверждения про разность $ab - cd$ (напр. доказано, что она не может быть чётной)	1 балл
задача проиллюстрирована на примерах	0 баллов